Topologia
Lista 0,5 (powtórka z teorii mnogości)

Zad 1. Niech Z oznacza podzbiór, a R rodzinę podzbiorów pewnej przestrzeni P. Określić, czym jest X: elementem P, podzbiorem P, czy też rodziną podzbiorów P, jeśli

a)	$X \subset P$	d)	$X \subset R$	g)	$X = \bigcap_{Y \in R} Y$	j)	$X \in \bigcup_{Y \in Z} \{Y\}$	m)	$X = P \setminus Z$
b)	$X \in Z$	e)	$X \subset Z$	h)	$X \in \{Y : Y \in P\}$	k)	$X \subset \{Z, P\}$	n)	$X \in R \setminus \{Z\}$
c)	$X \in R$	f)	$X \in \{Z\}$	i)	$X \subset \{Y : Y \in R\}$	l)	$X \in \{Z, P\}$	o)	$X \subset \{P\}$

Zad 2. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$, gdzie A, B, C, są ustalonymi zbiorami takimi, że $B \subset A \subset C$.

Zad 3. Niech A, B, C będą dowolnymi zbiorami. Pokazać, że

a)	$A \setminus B = A \cap B'$	d)	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	g)	$(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
b)	$(A \cup B) \cap A' = B \setminus A$	e)	$A \cup (A \cap B) = A = A \cap (A \cup B)$	h)	$A \setminus B = (A' \cup B)'$
c)	$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup A)$	f)	$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$	i)	$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

Zad 4. Niech $\{A_t\}_{t \in T}$ będzie rodziną zbiorów. Udowodnić następujące związki zwane *prawami De Morgana*[1]

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)' = \bigcap_{t \in T} A_t', \qquad \left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)' = \bigcup_{t \in T} A_t'$$

Zad 5. Niech X będzie niepustym zbiorem. Pokazać, że zbiór potęgowy 2^X wraz z różnicą symetryczną $\triangle$ tworzy grupę przemienną.[2]

Zad 6. Wykazać, że jeśli $f : X \to Y$ jest funkcją oraz A, $B \subset X$, to

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B), \qquad f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B).$$

Pokazać, na przykładzie, że na ogół inkluzji nie można zastąpić równością.

Zad 7. Niech $f : X \to Y$ oraz A, $B \subset Y$. Udowodnić, że

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \qquad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

Zad 8. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją. Wykazać, że

a) f jest injekcją $\iff f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$,

b) f jest injekcją $\iff f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$, dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$.

Zad 9. Niech $f : X \to Y$, $A \subset X$ oraz $B \subset Y$. Sprawdzić, że zachodzą inkluzje

$$f^{-1}(f(A)) \supset A, \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B$$

oraz żadnej z nich na ogół nie można zastąpić równością.

Zad 10. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją. Pokazać, że

a) f jest injekcją $\iff f^{-1}(f(A)) = A$, dla dowolnego zbioru $A \subset X$,

b) f jest surjekcją $\iff f(f^{-1}(B)) = B$, dla dowolnego zbioru $B \subset Y$,

c) f jest bijekcją $\iff f^{-1}(f(A)) = A$ i $f(f^{-1}(B)) = B$, dla dowolnych $A \subset X$, $B \subset Y$.

---

[1] Augustus De Morgan (1806-1871) angielski matematyk i logik

[2] przypominamy, że $2^X = \{A : A \subset X\}$ oraz $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$